École Supérieure de Commerce de Paris

CONCOURS D'ADMISSION DE 1993

Mathématiques III

OPTION ÉCONOMIQUE

EXERCICE 1

Dans l'espace vectoriel $\mathbf{R}^4$ muni de sa base canonique $B = (e_1, e_2, e_3, e_4)$, on considère les quatre vecteurs :

$$f_1 = (1, 1, 1, 1), \quad f_2 = (1, 1, -1, -1), \quad f_3 = (1, -1, 1, -1), \quad f_4 = (1, -1, -1, 1)$$

1. Montrer que (f_1, f_2, f_3, f_4) est une base de $\mathbf{R}^4$. On notera désormais cette base C.

2. On considère l'endomorphisme u de $\mathbf{R}^4$ défini par les relations :

$$u(e_1) = f_1, \quad u(e_2) = f_2, \quad u(e_3) = f_3, \quad u(e_4) = f_4$$

a) Montrer que u est un automorphisme de $\mathbf{R}^4$. Expliciter sa matrice associée dans la base canonique B.

b) Montrer que l'endomorphisme u^2 est un endomorphisme simple, que l'on déterminera.

c) Déterminer la matrice associée à l'endomorphisme réciproque de u dans la base B.

d) Déterminer la matrice associée à l'endomorphisme u dans la base C.

3. On considère les suites $(x_n)_{n\geq 0}$, $(y_n)_{n\geq 0}$, $(z_n)_{n\geq 0}$, $(t_n)_{n\geq 0}$ de nombres réels définies par les valeurs initiales x_0, y_0, z_0, t_0, et, pour tout nombre entier naturel n, par les relations de récurrence :

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \frac{1}{4}(x_n + y_n + z_n + t_n) \\ y_{n+1} &= \frac{1}{4}(x_n + y_n - z_n - t_n) \\ z_{n+1} &= \frac{1}{4}(x_n - y_n + z_n - t_n) \\ t_{n+1} &= \frac{1}{4}(x_n - y_n - z_n + t_n) \end{aligned}$$

À l'aide de l'endomorphisme u, donner une interprétation vectorielle de ces relations. En déduire que les quatre suites considérées ont pour limite 0.

4. Déterminer les valeurs propres de u et une base de chacun des sous-espaces propres associés. L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?

EXERCICE 2

A. Pour tout nombre entier naturel non nul n, on pose :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \, dx$$

1. Sans calculer l'intégrale I_n, montrer que la suite $(I_n)_{n\geq 1}$ est décroissante, puis qu'elle est convergente.

2. Calculer la dérivée de la fonction $x \mapsto \tan^{n+1} x$. En déduire, pour tout nombre entier naturel non nul n, une expression de $I_n + I_{n+2}$.

3. Montrer que, pour tout nombre entier naturel non nul n :

$$\frac{1}{2(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$$

En déduire la limite de la suite $(I_n)_{n \geq 1}$.

B. Soit t un nombre réel appartenant à l'intervalle $]0, \frac{\pi}{4}[$. Pour tout nombre entier naturel non nul n, on pose :

$$I_n(t) = \int_0^t \tan^n x \, dx$$
$$S_n(t) = I_1(t) + I_2(t) + \cdots + I_n(t)$$

1. Pour tout nombre entier naturel non nul n et pour tout élément x de $[0, t]$, vérifier que :

$$a) \left| \tan x + \tan^2 x + \cdots + \tan^n x - \frac{\tan x}{1 - \tan x} \right| = \frac{\tan^{n+1} x}{1 - \tan x}$$

$$b) \ 0 \leq \frac{\tan^n x}{1 - \tan x} \leq \frac{\tan^n t}{1 - \tan t}$$

2. Montrer que, pour tout nombre entier naturel non nul n :

$$\left| S_n(t) - \int_0^t \frac{\tan x}{1 - \tan x} dx \right| \leq t \, \frac{\tan^{n+1} t}{1 - \tan t}$$

En déduire que la suite $(S_n(t))_{n \geq 1}$ a une limite lorsque n tend vers l'infini.

3. On se propose de trouver une expression de cette limite.

a) Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{4}[$ par la relation :

$$f(x) = \ln(\cos x - \sin x)$$

Montrer que f est dérivable et calculer sa dérivée.

b) On pose :

$$J(t) = \int_0^t \frac{\sin x}{\cos x - \sin x} dx \quad \text{et} \quad K(t) = \int_0^t \frac{\cos x}{\cos x - \sin x} dx$$

Calculer $J(t)$ et $K(t)$ à partir de $K(t) - J(t)$ et $K(t) + J(t)$. En déduire la limite de $(S_n(t))_{n \geq 1}$ lorsque n tend vers l'infini.

EXERCICE 3

Soit f la fonction numérique définie sur **R** par les relations :

$$f(x) = \begin{cases} 6x(1-x) & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que f est une densité de probabilité.

2. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans [0, 1], de densité de probabilité f.

a) Déterminer la fonction de répartition F de X.

b) Calculer l'espérance et la variance de X.

3. *a*) Montrer qu'à tout élément y de l'intervalle [0, 1] on peut faire correspondre un élément u et un seul de [0, 1] tel que :

$$\int_0^u f(x)\,dx = y$$

On note désormais $\varphi(y)$ ce nombre u. De quelle fonction la fonction φ ainsi définie est-elle la réciproque ?

b) Montrer que φ est continue sur [0, 1] et dérivable sur]0, 1[. Trouver les valeurs de y dans]0, 1[telles que $\varphi'(y) = \frac{3}{4}$.

c) Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire $Z = 3X^2 - 2X^3$. Quelle est sa loi de probabilité ?

4. On considère des variables aléatoires X_1 et X_2 de même loi que X. On suppose que, pour tout couple (x_1, x_2) de nombres réels, les événements $\{X_1 \leq x_1\}$ et $\{X_2 \leq x_2\}$ sont indépendants. On pose $T = \sup(X_1, X_2)$. (Autrement dit, T est la variable aléatoire qui prend la plus grande des valeurs prises par X_1 et X_2.) Trouver la fonction de répartition de T. En déduire sa densité de probabilité et son espérance.